Правительство Российской Федерации

Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

Факультет Менеджмента

Кафедра высшей математики

Программа дисциплины

Математика (линейная алгебра и математический анализ)

для направления 080200.62 «Менеджмент» подготовки бакалавра

Автор: Доктор ф.-м.н., профессор, академик
Российской Академии естественных наук
Е.В. Коваленко (ekovalenko@hse.ru)

Москва 2011

Пояснительная записка

Автор программы: Доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской Академии естественных наук Е.В. Коваленко.

Требования к студентам: Изучение курса «Математика (линейная алгебра и математический анализ)» не требует предварительных знаний, выходящих за рамки программы общеобразовательной средней школы.

Аннотация: Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира – играет совершенно особую, все возрастающую роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Являясь универсальным языком Науки, математика позволяет не только осуществлять различные количественные расчеты, но и является средством предельно четкой формулировки понятий и проблем той или иной отрасли знаний. Математика стала элементом общечеловеческой культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного менеджера.

Целью курса является формирование у слушателей высокой математической культуры, в том числе:

− овладение основными знаниями по математике, необходимыми в практической экономической деятельности;

− развитие логического мышления и умения оперировать абстрактными объектами, привитие навыков корректного употребления математических понятий и символов для выражения различных количественных и качественных отношений;

− выработка представления о роли и месте математики в современной цивилизации и мировой культуре;

− ясное понимание математической составляющей в общей подготовке специалиста в области экономики и менеджмента.

Для реализации поставленной цели в ходе изучения курса «Математика» решается задача обеспечения широкого, общего и достаточно фундаментального математического образования студентов. Фундаментальность подготовки включает в себя достаточную общность математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, разумную точность формулировок математических свойств исследуемых объектов, логическую строгость изложения предмета, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Учебные задачи курса: В результате изучения курса «Математика» студенты должны:

− знать и уметь использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач экономики;

− иметь представление о математическом моделировании простейших экономических проблем и содержательно интерпретировать получаемые количественные результаты их решений;

− овладеть навыками самостоятельной работы и постоянно пополнять свой уровень знаний в свете современных тенденций развития математического инструментария для решения экономических задач.

Тематический план курса «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов по дисциплине	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
0	Введение	**8**			**8**
1	Сведения из дискретной математики и математической логики	**10**			**10**
2	Алгебра и основы аналитической геометрии	**88**	**20**	**16**	**52**
2.1	Матрицы и определители	**20**	**4**	**4**	**12**
2.2	Системы линейных алгебраических уравнений	**22**	**4**	**4**	**14**
2.3	Основы аналитической геометрии	**22**	**4**	**4**	**14**
2.4	Элементы матричного анализа	**24**	**8**	**4**	**12**
3	Математический анализ	**110**	**24**	**28**	**58**
3.1	Функции одной переменной, основы теории пределов, непрерывность	**18**	**4**	**4**	**10**
3.2	Дифференциальное исчисление функции одной переменной и предельные величины в экономике	**18**	**4**	**4**	**10**
3.3	Исследование	**22**	**4**	**6**	**12**

	функции одной переменной при помощи производных и построение их графиков				
3.4	Функции нескольких переменных	**28**	**8**	**6**	**14**
3.5	Интегральное исчисление и основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений	**24**	**4**	**8**	**12**
Итого:		**216**	**44**	**44**	**128**

Базовый учебник:

Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 1999.

Разделы:

А. Основы алгебры векторов и матриц.
В. Основы математического анализа.
.

Формы контроля знаний студентов

Основными формами изучения дисциплины «Математика(линейная алгебра и математический анализ)» являются лекции, практические занятия (семинары), целью которых является приобретение студентами прочных навыков математических расчетов и осмысление теоретического материала. Кроме того, закрепление полученных знаний проводится посредством самостоятельной работы студентов, формами контроля которой являются аудиторная контрольная работа и домашние задания по ключевым разделам курса (см. **«Тематика заданий по формам контроля»**).

Промежуточный контроль реализуется в форме зачетной письменной работы (теста), проводимой для всего курса в конце второго модуля, и охватывает теоретический материал как первого, так и второго модулей.

Итоговый контроль по дисциплине «Математика» осуществляется, как и промежуточный, в тестовом формате, проводится для всего потока в конце третьего модуля и охватывает теоретический материал всех предыдущих модулей. Результирующая оценка является балльной и проставляется по десятибалльной шкале с последующим пересчетом ее по пятибалльной системе (от «отлично» до «неудовлетворительно»). Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной шкалам приведена ниже.

Методика формирования результирующей оценки промежуточного контроля по дисциплине «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»

Все формы текущего контроля оцениваются по десятибалльной шкале O_i. Для оценки относительной важности отдельных видов текущего контроля и теста промежуточного контроля вводятся веса W_i таким образом, чтобы $\sum_i W_i = 1$. Например, если выполнение домашнего задания студентом оценивается с весом $W_1 = 0{,}2$, вес контрольной работы, проводимой в конце первого модуля, $W_2 = 0{,}3$, а вес работы на семинарских занятиях, соответственно, в первом и втором модулях, $W_3 = 0{,}1$, то вес теста промежуточного контроля составит $W_4 = 0{,}4$, а соответствующий этим видам контроля вектор максимальных оценок запишется в виде $\{2;3;1;4\}$. Находится средневзвешенная оценка отдельных форм текущего контроля и теста промежуточного контроля

$$\overline{O}_1 = \sum_i O_i W_i \,,$$

Методика формирования результирующей оценки итогового контроля по дисциплине «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»

По изложенному выше алгоритму выводится средневзвешенная оценка промежуточного контроля $\overline{O}_2$ за третий модуль, где веса $W_1 = 0{,}3$, $W_2 = 0{,}1$, $W_3 = 0{,}6$ соответствуют выполнению студентом домашнего задания, работе на семинарских занятиях и тесту итогового контроля за первый-третий модули. Итоговая оценка по дисциплине «Математика (линейная алгебра и математический анализ)» подсчитывается по следующему правилу:

$$\overline{O} = \sum_i \overline{O}_i W_i \ ,$$

где $\overline{O}_i$ - средневзвешенная оценка промежуточного контроля, полученная студентом за определенный отчетный период, W_i - ее вес. Например, если данная дисциплина изучается в течение трех модулей, и результирующие средневзвешенные оценки за первый-второй и третий модули составляют:

$$\overline{O}_1 = 7{,}1; \ \overline{O}_2 = 8{,}2 \ ,$$

а их веса приняты равными

$$W_1 = 0{,}4 \, ; \ W_2 = 0{,}6 \ ,$$

то $\overline{O} = 7{,}1 \cdot 0{,}4 + 8{,}2 \cdot 0{,}6 = 7{,}76$.

После округления $O = 8$, что соответствует оценке «отлично» по данной шкале пересчета. В ведомость и зачетную книжку студента выставляются две оценки: «отлично (8)».

Таблица соответствия оценок по десятибалльной и пятибалльной системам

По десятибалльной шкале	По пятибалльной шкале
1 – неудовлетворительно 2 – очень плохо 3 – плохо	неудовлетворительно – 2
4 – удовлетворительно 5 – весьма удовлетворительно	удовлетворительно – 3
6 – хорошо 7 – очень хорошо	хорошо – 4
8 – почти отлично 9 – отлично 10 – блестяще	отлично – 5

Примечания. 1. Студенты получают общую положительную оценку по итоговому контролю **только** при написании ими теста итогового контроля на положительную оценку.

2. Студенты, не явившиеся на контрольную работу, проводимую в конце первого модуля, по любой причине, а также получившие неудовлетворительные оценки, к повторному написанию ее не **допускаются**.

Содержание программы

Введение

Понятие функции. Элементарные функции. Преобразования графиков функций. Производная функции и основные правила дифференцирования (обзор теорем школьного курса). Таблица производных основных элементарных функций.

Раздел 1. Сведения из дискретной математики и математической логики

Логические высказывания. Алгебра символической логики (алгебра высказываний). Логические связки. Таблицы истинности. Исчисление высказываний. Аксиомы, теоремы, следствия. Прямая и обратная теоремы. Необходимость и достаточность. Принцип математической индукции и его применение для доказательства логических утверждений и математических формул.

Понятие множества и подмножества. Конечные и бесконечные множества. Мощность множества. Операции над множествами и их свойства. Диаграммы Эйлера-Венна. Отношения между множествами. Бинарное отношение и эквивалентность.

Элементы комбинаторики. Размещения, сочетания, перестановки. Формула бинома Ньютона.

Раздел 2. Алгебра и основы аналитической геометрии

Тема 2.1. Матрицы и определители

Основные понятия алгебры матриц. Операции над матрицами (сложение, перемножение, умножение на число) и их свойства.

Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков, их свойства и способы вычисления. Понятие определителя n-го порядка.

Невырожденная матрица. Существование и нахождение обратной матрицы методом присоединенной матрицы.

Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы и его вычисление. Теорема о базисном миноре.

Тема 2.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными: основные определения и классификация. Матричная форма записи систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными при помощи правила Крамера.

Треугольный вид СЛАУ. Элементарные преобразования СЛАУ (матрицы системы и расширенной матрицы системы). Метод Гаусса (метод исключения) решения СЛАУ. Критерии совместности и определенности СЛАУ. Классификация СЛАУ.

Примеры решения СЛАУ методом Гаусса. Базисные и свободные неизвестные, общее и частные решения неопределенной линейной системы. Базисные решения.

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Определенная неоднородная система и второй способ нахождения обратной матрицы. Однородная система и условия существования ее нетривиального решения.

Тема 2.3. Основы аналитической геометрии

Трехмерное пространство. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Условия коллинеарности и компланарности векторов.

Базис на плоскости и в пространстве. Декартов базис. Разложение вектора по базису. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами. Деление отрезка в данном отношении.

Скалярное произведение векторов и его свойства. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных своими координатами. Вычисление длины вектора и расстояния между точками. Неравенство Коши-Буняковского. Угол между векторами. Необходимое и достаточное условия перпендикулярности векторов.

Понятие об уравнении линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости.

Прямая и плоскость в пространстве. Расстояния от точки до прямой и от точки до плоскости. Углы между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Решение простейших задач аналитической геометрии.

Тема 2.4. Элементы матричного анализа

Арифметические векторы как частный случай матриц и действия с ними. Арифметическое векторное пространство и пространство R^n. Евклидово пространство. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис векторного пространства. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение общего решения однородной СЛАУ по векторам ее фундаментальной системы. Общий вид решений однородных и неоднородных СЛАУ.

Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений. Уравнения прямой и плоскости в R^n.

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (оператора), заданного матрицей. Базис пространства R^n из собственных векторов матрицы. Собственные векторы и собственные значения симметрической матрицы (самосопряженного оператора).

Квадратичная форма и ее матрица. Канонический базис квадратичной формы. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Применение элементов линейной алгебры в экономике: модель Леонтьева многоотраслевой экономики, модель равновесных цен, модель международной торговли.

Раздел 3. Математический анализ

Тема 3.1. Функции одной переменной, основы теории пределов, непрерывность

Множества действительных чисел – отрезок, интервал, окрестность. Абсолютная величина и ее свойства. Понятие функции. Способы задания функций. Свойства функций: монотонность, ограниченность, четность, периодичность. Сложная функция. Обратная функция. Основные элементарные функции и их графики. Примеры функций, используемых в экономическом моделировании (функции спроса и предложения, задача поиска равновесной цены, функции Торнквиста, функции потребления и бюджетного ограничения, зависимости издержек и дохода от объема производства и т.п.).

Предел последовательности и предел функции. Геометрическая интерпретация предела функции. Односторонние пределы. Признак существования предела функции. Предел на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Задача о непрерывном начислении процентов. Сравнение бесконечно малых функций. Порядок малости. Эквивалентные бесконечно малые функции и их использование при вычислении пределов.

Непрерывность функции в точке. Приращение функции, непрерывной в точке. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва функции и их классификация. Формулировка свойств функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции и ее приложение к решению уравнений. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Непрерывность обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной и предельные величины в экономике

Производная функции в точке, ее геометрический, механический и экономический смысл. Понятие средних и предельных величин в экономике. Предельная полезность продукта и предельная производительность ресурса («золотое правило экономики»).

Приращение и непрерывность функции, имеющей производную. Понятие дифференцируемой функции и дифференциала функции одной переменной. Геометрическая интерпретация дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций. Логарифмическое дифференцирование. Производная обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной функции. Неявно заданная функция и ее дифференцирование. Производная от функции, заданной параметрически. Понятие о производных высших порядков.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Предельные показатели в микроэкономике – себестоимость и эластичность. Влияние эластичности спроса по цене на суммарный доход при реализации продукции.

Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа о конечном приращении) и их геометрическая интерпретация. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

Тема 3.3. Исследование функций одной переменной при помощи производных и построение их графиков

Возрастание и убывание функции. Достаточный признак монотонности дифференцируемой на интервале функции. Условие постоянства функции. Локальные экстремумы функций. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Первый достаточный признак экстремума. Второй достаточный признак экстремума (с применением производных высших порядков). Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке. Общая схема отыскания экстремумов. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной на отрезке функции.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции на интервале. Точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условия точки перегиба.

Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Нахождение асимптот.

Общая схема исследования функций и построение их графиков по характерным точкам.

Приложения производной в экономической теории: максимизация прибыли; оптимизация налогообложения предприятий; закон убывающей отдачи.

Тема 3.4. Функции нескольких переменных

О функциональных зависимостях между несколькими переменными величинами. Функции двух переменных и области их определения. Способы задания функций. График функции двух переменных. Линии уровня. Понятие функции нескольких $(m \geq 3)$ переменных. Способы визуализации. Карта поверхностей равного уровня.

Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Точки разрыва функций. Непрерывность элементарных функций. Формулировка основных свойств функций нескольких переменных, непрерывных в замкнутых ограниченных областях.

Частные производные функции нескольких переменных и их геометрический смысл. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке. Формулировка достаточных условий дифференцируемости. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Замена факторов по производственной функции Кобба-Дугласа. Понятие о коэффициенте заменяемости ресурсов.

Частные производные сложной функции. Полная производная. Производная по направлению. Градиент функции, его геометрический смысл и основные свойства. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы. Касательные прямые и плоскости. Уравнение нормали к поверхности уровня функции нескольких переменных.

Частные производные высших порядков. Формулировка теоремы о перестановке порядка дифференцирования. Дифференциал второго порядка. Дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности формы дифференциалов высших порядков сложной функции на примере второго дифференциала. Векторно-матричная форма записи первого и второго дифференциалов функции нескольких переменных. Матрица Гессе. Формула Тейлора для функции m переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

Понятие локального экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия локального минимума и максимума. Геометрическое исследование локального экстремума: особенности графика и карты линий равного уровня дважды дифференцируемой функции в окрестности точки локального экстремума.

Условный локальный экстремум функции нескольких переменных. Метод исключения переменных: сведение задачи об условном экстремуме к задаче о безусловном экстремуме. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия локального условного экстремума и их геометрическая интерпретация в случае функции двух переменных. Метод окаймленного гессиана для исследования достаточных условий условного экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции m переменных в замкнутой ограниченной области. Понятие о выпуклых функциях нескольких переменных.

Функции нескольких переменных в задачах экономики. Оптимизационные задачи на основе производственных функций: расчет прибыли от производства товаров различных видов; задача ценовой дискриминации; максимизация прибыли производства продукции при заданном ограничении на объем выпуска товаров. Применение метода наименьших квадратов для определения параметров различных экономических зависимостей.

Тема 3.5. Интегральное исчисление и основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Первообразная. Общий вид первообразной для данной функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Интегрирование рациональных дробей. Квадратуры, сводящиеся к интегрированию рациональных функций. Интегрирование некоторых видов иррациональностей. Интегралы, содержащие тригонометрические функции.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл и его свойства. Теорема о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу (теорема о существовании первообразной для непрерывной функции). Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной (методом подстановки). Интегрирование по частям.

Несобственные интегралы первого типа (с бесконечными пределами интегрирования). Несобственные интегралы второго типа (от неограниченных функций). Теоремы сравнения (признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций). Абсолютная и условная сходимости.

Геометрические и экономические приложения определенного интеграла: нахождение площадей плоских фигур; нахождение объемов тел вращения; вычисление объема произведенной продукции по известной производительности труда; определение дисконтированного дохода при фиксированной процентной ставке и известной функции ежегодного увеличения начальных капиталовложений; задачи экономического содержания, решения которых опираются на нахождение среднего значения непрерывной на отрезке функции; задача максимизации прибыли с целью своевременной остановки производства; расчет выигрыша потребителей и поставщиков товара.

Задачи физического, геометрического и экономического содержания, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Основные понятия теории ОДУ: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая.

ОДУ первого порядка. Геометрическое истолкование ОДУ первого порядка: поле направлений, изоклины. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Частное и общее решение ОДУ, их геометрический смысл. Общий интеграл ОДУ первого порядка.

Некоторые типы ОДУ первого порядка, решаемые в квадратурах: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными, однородные, линейные ОДУ.

Применение аппарата ОДУ в экономической динамике: математические модели экономического роста.

Тематика практических занятий (семинаров) по модулям

Занятие 1

Действия с матрицами. Вычисление определителей квадратных матриц. Решение матричных уравнений. Ранг матрицы и его вычисление.

Задачи в аудитории: [5] № 5.4; 5.5; 5.12; 4.16; 4.21; 4.29(б); 4.31(б); 5.25; 5.29; 5.39; 5.42; 5.44; 5.48; 4.37; 4.39; 5.58; 5.60; 5.65.

Задачи на дом: [5] № 5.8; 5.10; 5.13; 5.15(б); 5.19(а,б); 4.17; 4.22; 4.30(б); 4.31(а); 5.28; 5.35; 5.37; 5.40; 5.41; 5.45; 5.47; 5.51(б); 4.38; 4.41; 5.59; 5.61; 5.64.

Занятия 2-3

Исследование и решение СЛАУ методом Крамера и методом Гаусса.

Задачи в аудитории: [5] № 6.2; 6.4; 6.6; 6.8; 6.12; 6.14; 6.16; 6.18; 6.20; 6.22; 6.24; 6.26; 6.28; 6.30; 6.32; 6.34.

Задачи на дом: [5] № 6.3; 6.5; 6.7; 6.9; 6.13; 6.15; 6.17; 6.19; 6.21; 6.23; 6.25; 6.27; 6.29;6.31; 6.33; 6.36.

Занятие 4

Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве.

Задачи в аудитории: [5] № 2.5; 2.14; 2.21(а,б); 2.28; 2.32; 2.35; 2.37; 2.40; 2.43; 2.47(а, б); 2.50; 2.54; 2.59; 2.66; 2.70; 2.74; 2.78.

Задача. Даны вершины ΔABC: A(6;3), B(10;4), C(9,7). Составьте уравнение высоты BD и медианы BM; вычислите длины отрезков BD и BM.

Задачи на дом: [5] № 2.8; 2.11; 2.17; 2.21(в,г); 2.33; 3.11; 2.38; 2.41; 2.45; 2.47(в, г); 2.51; 2.55; 2.61; 2.63; 2.64; 2.72; 2.76; 2.79.

Задача. Найдите точку, симметричную точке $A(-1;-2)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(-4;1)$ и $C(-6;-2)$.

Занятия 5-6

Линейные операции над векторами. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Разложение вектора по системе векторов. Базис векторного пространства. Переход к новому базису. Фундаментальная система решений для СЛАУ и теорема об общем решении неоднородной СЛАУ.

Задачи в аудитории: [5] № 1.2; 1.4; 1.7; 1.10; 1.14; 1.15; 1.19; 1.20; 1.24; 1.25; 1.27; 1.29; 7.22; 7.23; 7.3; 7.6; 7.45; 7.50; [30] № 3.26; 3.27; [5] № 7.111; 7.113; 7.115; 7.117; 7.119; 7.121; 7.123; 7.125.

Задачи на дом: [5] № 1.3; 1.5; 1.8; 1.11; 1.12; 1.16; 1.21; 1.26; 1.28; 1.31; 1.32; 7.21; 7.24; 7.27; 7.2; 7.8; 7.46; 7.51; 7.112; 7.114; 7.116; 7.118; 7.120; 7.122; 7.124; 7.126.

Занятие 7

Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (оператора), заданного матрицей. Квадратичные формы.

Задачи в аудитории: [5] № 9.4; 9.6; 9.8; 9.10; 9.12; 9.26; 9.28; 9.34; 9.36; 9.59; 9.63; 9.69; 9.71; 9.77.

Задачи на дом: [5] № 9.3; 9.5; 9.7; 9.9; 9.11; 9.25; 9.27; 9.35; 9.37; 9.60; 9.62; 9.64; 9.66; 9.68; 9.70; 9.72; 9.74; 9.76.

Занятие 8

Контрольная работа 1.1.

Занятие 9

Вычисление пределов последовательностей и функций. Понятие непрерывности функции. Непрерывность и пределы элементарных функций. Замечательные пределы. Метод замены переменной при вычислении пределов функций.

Задачи в аудитории: [5] № 11.3(а,б,в); 11.5; 11.7; 11.10; 11.13; используя определения предела функции докажите, что $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$; 11.40(а,б); 11,42(а,б); [6] № 4.230; 4.247; 4.269; 4.272; 4.288; 4.290; 4.298; 4.303; 4.305; вычислите пределы:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x};\quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2};\quad 3)\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2};\quad 4)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{arctgx};$$

$$5)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x};\quad 6)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-4};\quad 7)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+5}\right)^{x};\quad 8)\lim_{x\to 0}(1+3tgx)^{\frac{2}{\sin x}}.$$

Задачи на дом: [5] № 11.4; 11.8; 11.12; 11.18; 11.33(а,б); 11,35(а,б,в); 11,41(а,б); [6] № 4.231; 4.248; 4.260; 4.268; 4.271; 4.273; 4.237; 4.259; 4.263; 4.274; 4.279; 4.280; 4.283; 4.285; 4.292; 4.296; 4.302; 4.304; вычислите пределы:

$$1)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{\cos x};\quad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{2x+5};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)};\quad 4)\lim_{x\to 0}(\sin x+1)^{1/x}.$$

Занятие 10

Техника нахождения пределов. Сравнение бесконечно малых величин. Соотношения эквивалентности и их использование при нахождении пределов функций.

Задачи в аудитории: [6] № 4.310; 4.317; 4.329; 4.335; 4.348; 4.355; 4.363; 4.369; вычислите пределы:

$$1)\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x};\quad 2)\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{\sin\pi x};\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{\sin^3 2x};\quad 4)\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{e^x-e^\pi}.$$

Задачи на дом: [6] № 4.306(2,3,8);4.312; 4.315; 4.330; 4.336; 4.347; 4.360; 4.364; 4.370; 4.375.

Занятие 11

Техника дифференцирования: производная сложной функции; логарифмическое дифференцирование; дифференцирование функций, заданных параметрически; производная неявной функции; производные высших порядков.

Задачи в аудитории: [5] № 12.39; 12.43; 12.47; 12.49; 12.55; 12.57; 12.58; 12.63; 12.67; 12.69; 12.71; 12.75; 12.139; 12.141; 12.77; 12.81; 12.82; 12.84; 12.95; 12.144; 12.148.

Задачи на дом: [5] № 12.41; 12.45; 12.50; 12.53; 12.59; 12.61; 12.64; 12.65; 12.66; 12.68; 12.72; 12.73; 12.74; 12.79; 12.80; 12.83; 12.93; 12.96; 12.140; 12.142; 12.146; 12.147.

Занятие 12

Дифференциал функции и его применения к приближенным вычислениям. Геометрические приложения производной. Использование понятия производной в экономике.

Задачи в аудитории: [5] № 12.101; 12.108; 12.117; 12.120; 12.123; 12.129; 12.131; 12.134; 18.43(а,б); 18.54(а); 18.73(а,б); [11] № 7.17; 7.18.

Задачи на дом: [5] № 12.103; 12.109; 12.118; 12.119; 12.125; 12.130; 12.132; 12.136; 18.41(а,б); 18.54(б); 18.75(а,б); [11] № 7.54; 7.55; 7.56.

.

Занятие 13

Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Использование формулы Тейлора для вычисления пределов.

Задачи в аудитории: [5] № 12.158; 12.163; 12.173; 12.175; 12.177; 12.182; 12.186; 12.189; 12.191; 12.193; 12.196; 12.201.

Задачи на дом: [5] № 12.157; 12.162; 12.174; 12.176; 12.183; 12.187; 12.190; 12.194; 12.195; 12.204.

Занятия 14-15

Исследование функций при помощи производных и построение их графиков по характерным точкам.

Задачи в аудитории: [5] № 12.206; 12.209; 12.211; 12.215; 12.220; 12.226; 12.228; 12.235; 12.237; 12.244; 12.249; 12.253; 12.257; 12.261; 12.275; 12.286; построить графики функций:

$$1)\, y = x(x-1)^{2/3}; \qquad 2)\, y = x\, ln^2 x.$$

Задачи на дом: [5] № 12.212; 12.213; 12.216; 12.223; 12.229; 12.232; 12.234; 12.236; 12.239; 12.247; 12.251; 12.258; 12.260; 12.268; 12.283; 12.284; 12.285; 12.289.

Занятие 16

Нахождение областей определения и линий уровня функций двух переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

Задачи в аудитории: [5] № 13.2; 13.6; 13.10; 13.12; 13.15; [6] № 11.62; 11.65; 11.70; 11.74; 11.83; 11.88; 11.90.

Задачи на дом: [5] № 13.3; 13.5; 13.14; 13.16; 13.18; [6] № 11.64; 11.68; 11.69; 11.73; 11.76; 11.81; 11.86; 11.87; 11.89.

Занятие 17

Дифференцирование функций нескольких переменных: частные производные, дифференциал. Полная и частные производные сложной функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Задачи в аудитории: [5] № 13.27; 13.29; 13.35; 13.39; 13.42; 13.47; 13.52; 13.64; 13.71; 13.73; 13.76; 13.79; 13.84; 13.89; 13.93; [6] № 12.24; 12.26; 12.28; 12.30; 12.33; 12.95; 12.99; 12.105.

Задачи на дом: [5] № 13.26; 13.31; 13.36; 13.38; 13.40; 13.46; 13.48; 13.54; 13.63; 13.65; 13.67; 13.75; 13.83; 13.87; 13.94; [6] № 12.23; 12.25; 12.27; 12.31; 12.32; 12.94; 12.100; 12.106.

Занятие 18

Исследование функции нескольких переменных на локальные экстремумы. Условные экстремумы функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных, непрерывной в замкнутой ограниченной области. Метод наименьших квадратов.

Задачи в аудитории: [5] № 13.103; 13.106; [6] № 12.113; 12.115; 12.118; 12.127; [5] № 13.110; 13.113; 13.114; 13.117; 13.120. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в области D, заданной неравенствами. Сделайте чертеж.

$$1)z = 1 + x + 2y;\; D: x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1;\; 2)z = x^2 y;\; D: x^2 + y^2 \le 1;$$

$$3)z = x^3 + y^3 - 3xy;\; D: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2;$$

$$4)z = -2x^2 - xy - y^2 + 5x + 3y;\, D: x = -3, y = -2, x + y = 6.$$

Задачи на дом: [5] № 13.102; 13.104; 13.105; [6] № 12.114; 12.116; 12.117; 12.126; [5] № 13.109; 13.111; 13.112; 13.115; 13.118; 13.119.

Занятие 19

Основные способы вычисления неопределенного интеграла: табличное интегрирование, метод замены переменной, интегрирование по частям.

Задачи в аудитории: [5] №14.3; 14.8; 14.10; 14.12; 14.14; 14.17; 14.22; 14.33; 14.38; 14.44; 14.46; 14.50; 14.52; 14.56; 14.59; 14.63; 14.72.

Задачи на дом: [5] №14.7; 14.11; 14.13; 14.15; 14.16; 14.23; 14.26; 14.32; 14.35; 14.41; 14.47; 14.51; 14.57; 14.58; 14.60; 14.67; 14.71.

Занятие 20

Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических функций и некоторых видов иррациональностей.

Задачи в аудитории: [5] №14.77; 14.80; 14.83; 14.89; 14.96; 14.107; 14.111; 14.122; 14.127; 14.132; 14.142; 14.147; 14.148; 14.153.

Задачи на дом: [5] №14.78; 14.84; 14.88; 14.91; 14.98; 14.106; 14.112; 14.123; 14.129; 14.133; 14.145; 14.149; 14.150; 14.152.

Занятие 21

Определенный интеграл и методы его вычисления. Несобственные интегралы первого и второго рода. Приложения определенного интеграла к решению практических задач.

Задачи в аудитории: [5] №15.26; 15.31; 15.35; 15.41; 15.75; 15.79; 15.81; 15.83; 15.96; 15.99; 15.102; 15.54; 15.56; 15.62; 15.67; 18.99(в).

Задачи на дом: [5] №15.27; 15.32; 15.38; 15.40; 15.77; 15.82; 15.95; 15.101; 15.103; 15.49; 15.51; 15.63; 15.66; 18.99(г).

Занятие 22

Общие понятия теории ОДУ. Решение некоторых типов ОДУ первого порядка.

Задачи в аудитории: [5] №16.3; 16.6; 16.8; 16.11; 16.16; 16.19; 16.21; 16.32; 16.33; 16.35; 18.113(а); 18.119.

Задачи на дом: [5] №16.2; 16.5; 16.9; 16.12; 16.15; 16.18; 16.20; 16.22; 16.31; 16.34; 16.36; 18.113(б); 18.123.

Библиографический список

Основная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. М.: Высшая школа,1998.
2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. М.: ИНФРА-М,1998.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело,2000.
4. Кузнецов Б.Т. Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М,2001.
6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Дополнительная литература:

7. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник. М.: Наука, 1988.
8. Бугров Я.С. Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов. М.: Наука, 1988.

9. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учебное пособие. М.: Изд-во ГУ-ВШЭ, 1998.
10. Высшая математика для менеджера: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Лебедева. М.: Финстатинформ, 1999.
11. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.
12. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учебное пособие. М.: Юрайт,2000.
13. Григорьев С.Г. Линейная алгебра: Учебное пособие по высшей математике. М: ИВЦ Маркетинг, 1999.
14. Григорьев С.Г. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие по высшей математике. М.: ИВЦ Маркетинг, 2000.
15. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. М.: Вузовская книга, 1999.
16. Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. Ростов-на-Дону: ЛаПО,1997.
17. Замков О.О.,Черемных Ю.Н., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике: Учебник. М.: Дело и Сервис,1999.
18. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика: Решебник. М.: Физматлит, 2000.
19. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
20. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов: Учебник. СПб.: Лань, 2001.
21. Коваленко Е.В., Попов В.Ю. Алгебра и анализ: Учебно-методическое пособие. М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 2002.
22. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 1998.
23. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика. Алгебра и элементарные функции: Учебное пособие. Ч. 1. М.: Агар, 1999.
24. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики:

Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
25. Кустов Ю.А., Юмагулов М.Г. Математика. Основы математического анализа: теория, примеры, задачи. Домашний репетитор для студентов. М.: Рольф: Айрис-пресс, 1998.
26. Малыхин В.И Математика в экономике: Учебное пособие: М.: ИНФРА-М, 1999.
27. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие. СПб.: Специальная литература, 1996.
28. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Лань, 2001.
29. Письменный Д.Т. Высшая математика. 100 экзаменационных ответов. 1 курс. Домашний репетитор для студентов. М.: Рольф: Айрис-пресс,1999.
30. Практикум по высшей математике для экономистов: Учебное пособие для вузов / Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др.; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ-ДАНА,2002.
31. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. Ч.1. М.: Наука, 1993.
32. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник. В 2 ч. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 2000.
33. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник. В 2 ч. Ч.2. М.: Финансы и статистика, 1999.
34. Сюдсетер К., Стрем А., Берк П. Справочник по математике для экономистов. СПб.: Экономическая школа, 2000.
35. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. М.: Агар, 1999.
36. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учебное пособие. М.: Дело, 2000.
37. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. М.: Высшая школа,1998.
38. Шипачев В.С. Основы высшей математики: Учебное пособие для вузов.

М.: Высшая школа, 1998.

39. Anthony M., Biggs N. Mathematics for Economics and Finance. Methods and Modelling. Cambridge: CUP, 1996.

40. Chiang A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. N.Y.: McGraw – Hill, 1984.

41. Fuente A. Mathematical Methods and Models for Economists. Cambridge: CUP, 2000.

42. Simon C.P., Blume Z. Mathematics for Economists. W.W. Norton and Company, 1994.

Тематика заданий по формам контроля

1.1 Матрицы, определители и системы линейных алгебраических уравнений. Основы аналитической геометрии; элементы матричного анализа (контрольная работа).

2.1 Вычисление пределов последовательностей и функций. Производная и ее использование в экономическом анализе (домашнее задание).

2.2 Зачетная контрольная работа по курсу «Математика(линейная алгебра и математический анализ)».

3.1 Применение производной к исследованию функций; построение графиков функций.Функции нескольких переменных (домашнее задание).

3.2 Итоговая контрольная работа по дисциплине «Математика(линейная алгебра и математический анализ)».

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины «Математика(линейная алгебра и математический анализ)»

1. Метод математической индукции.
2. Перестановки, сочетания, размещения.
3. Множества, операции над множествами.
4. Матрицы, операции над ними и их свойства.
5. Определитель матрицы. Свойства определителей.
6. Миноры и алгебраические дополнения. Их связь с определителем матрицы.
7. Формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.
8. Обратная матрица и методы ее вычисления.
9. Решение матричных уравнений.
10. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о совместности СЛАУ.
11. Вычисление ранга матрицы методом приведения ее к треугольному виду.
12. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о базисном миноре.
13. Метод Гаусса решения СЛАУ. Базисные и свободные переменные.

Однородная СЛАУ, свойства ее решений.

14. Векторное пространство R^n. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейная зависимость и независимость векторов в R^n.
15. Размерность и базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису.
16. Собственные значения и собственные векторы матрицы (линейного оператора).
17. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
18. Евклидово пространство. Скалярное произведение векторов и его свойства. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
19. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Нахождение расстояния от точки до прямой и точки пересечения двух непараллельных прямых.
20. Общее уравнение плоскости в пространстве, нормальный вектор плоскости.
21. Прямая в пространстве, способы ее задания. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.
22. Комплексные числа и операции с ними. Основная теорема алгебры и теорема о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших: формулировки, примеры.
23. Определения функций одной и нескольких переменных. Область определения, способы задания функций.
24. Графики основных элементарных функций. Основные характеристики поведения функции. Линии уровня.
25. Экономические функции: спроса, предложения, полезности. Производственная функция.
26. Числовая последовательность и ее предел. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, связь между ними.
27. Основные теоремы о пределах функций. Переход к пределу в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной функции. Первый и второй замечательные пределы и их следствия.
28. Непрерывность функции одной переменной в точке и на отрезке. Точки разрыва функций и их классификация.
29. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.
30. Задачи, приводящие к понятию производной функции. Производная, ее механический, геометрический и экономический смысл (предельное значение, среднее значение функции, эластичность и ее геометрический смысл).
31. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования.
32. Таблица производных основных элементарных функций. Производные высших порядков.
33. Производные сложной и обратной функций. Производные функции, заданной параметрически, и неявной функции.

34. Дифференциал функции и его приложение к приближенным вычислениям. Второй дифференциал.
35. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя.
36. Условия возрастания и убывания функции.
37. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
38. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
39. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.
40. Общая схема исследования функций и построение их графиков по характерным точкам.
41. Функции нескольких переменных, предел и непрерывность.
42. Частные производные, их геометрический смысл на примере функций двух переменных.
43. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке. Полный дифференциал. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
44. Частные и полные производные сложной функции нескольких переменных. Производная по направлению и градиент.
45. Геометрический смысл полного дифференциала. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.
46. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.
47. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.
48. Условный экстремум. Методы подстановки и множителей Лагранжа. Геометрическая интерпретация.
49. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции нескольких переменных в ограниченной, замкнутой области.
50. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов.
51. Основные способы интегрирования: метод замены переменной, интегрирование по частям.
52. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование. Интегралы от рациональных дробей.
53. Интегрирование тригонометрических функций и простейших видов иррациональностей.
54. Определенный интеграл, его геометрический смысл и основные свойства.
55. Классы интегрируемых функций и формула Ньютона-Лейбница.
56. Методы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
57. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла.
58. Несобственные интегралы первого и второго рода: определение и способы вычисления.
59. Признаки сравнения исследования сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.
60. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия:

порядок, решение, общее и частное решения. Задача Коши.

61. Дифференциальные уравнения первого порядка, решаемые в квадратурах: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнение Бернулли.
62. Применение аппарата ОДУ в динамических моделях экономического роста.

Методические рекомендации (материалы) преподавателю

При проведении практических занятий по курсу «Математика(линейная алгебра и математический анализ)» рекомендуется:

- уделять внимание разбору теоретических задач, предлагаемых на лекциях и на семинарских занятиях;
- уделять внимание краткому повторению теоретического материала, который используется при решении упражнений и задач;
- осуществлять регулярную проверку домашних заданий;
- ставить проблемные вопросы типа, насколько предложенное достаточное условие близко к необходимому;
- по возможности, использовать примеры и задачи с экономическим содержанием;
- использовать при проведении практических занятий методы мозговой атаки;
- развивать математическую интуицию у студентов.

Методические указания студентам

Учиться преодолевать самый высокий уровень непонимания материала («непонятно, что непонятно»).

При разборе примеров в аудитории или в рамках выполнения домашних заданий целесообразно каждый шаг обосновывать теми или иными теоретическими положениями.

При изучении теоретического материала не зацикливаться на трудных и непонятных местах, смело их пропускать и двигаться дальше, а затем возвращаться к тому, что было пропущено (часто последующее проясняет предыдущее).

При чтении учебников и лекционных записок активно метить карандашом непонятные места. Карандаш легко стирается, когда вопрос можно снять.

С первых студенческих дней конструировать собственный стиль понимания сути изучаемого материала. Математические дисциплины в этой ситуации являются наиболее успешным полигоном.

Автор программы Е.В. Коваленко
31 августа 2011 г.

Черновик

Черновик