

---

# Программа курса «Дифференциальные уравнения»

И. А. Хованская, И. В. Щуров

## 1 Общая информация о дисциплине:

Курс «Дифференциальные уравнения» рассчитан на 1 семестр (2 модуля) по 4 акад. часа в неделю и является курсом по выбору для студентов 3-го и 4-го курсов экономического бакалавриата. Все математические понятия и навыки, необходимые для этого курса, содержатся в курсах «Математический анализ 1», «Линейная алгебра» и «Математический анализ 2».

## 2 Цели и задачи курса

Задача курса состоит в освоении базовой техники составления и анализа дифференциальных уравнений, которые возникают в экономических, финансовых и естественнонаучных задачах. Большинство результатов, которые будут изложены, являются классическим, однако математический язык, использующийся в курсе, претерпел, за последние десятилетия, существенные изменения. Особое внимание будет уделяться анализу устойчивости решений. Курс существенно опирается на сведения из математического анализа и линейной алгебры (курсы «Математический анализ 1», «Линейная алгебра» и «Математический анализ 2»).

## 3 Структура и содержание дисциплины

1. Понятие дифференциального уравнения. Примеры моделей, приводящих к дифференциальным уравнениям. Экспоненциальный рост населения, модель Солоу, простейшие механические системы.
2. Простейшие примеры дифференциальных уравнений в размерности 1. Задача Коши. Формула Барроу. Расширенное фазовое пространство. Интегральные кривые. Поле направлений. Дифференциальные 1-формы.
3. Многомерные фазовые пространства. Фазовые кривые, фазовые портреты. Прямое произведение уравнений. Связь автономных уравнений в размерности 2 с неавтономными в размерности 1. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения (без доказательства).
5. Уравнения в полных дифференциалах. Производная функции вдоль векторного поля (производная Ли). Первые интегралы. Теорема о выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки.
6. Консервативные системы с одной степенью свободы.

7. Линейные уравнения в размерности 1 с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных. Уравнения в вариациях по начальному условию.
8. Линейные системы с постоянными коэффициентами в произвольной размерности. Общие свойства.
9. Классификация особых точек системы линейных уравнений с двумя переменными.
10. Матричная экспонента. Решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами в произвольной размерности.
11. Линеаризация нелинейных систем вблизи особых точек.
12. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению (без доказательства).
13. Мягкие и жесткие модели. Структурная устойчивость. Понятие о бифуркациях. Примеры: седлоузловая бифуркация, бифуркация Андронова — Хопфа.
14. Предельные циклы. Отображение Пуанкаре. Устойчивость предельных циклов. 16-проблема Гильберта (формулировка).
15. Дифференциальные уравнения на двумерном торе. Плотная обмотка тора.

## 4 Описание методологии

Занятия делятся на лекционные и семинарские. Лекционный курс в основном следует современному изложению, основанному на курсе В.И. Арнольда и адаптированном под потребности студентов экономического бакалавриата. Задачи, обсуждаемые на семинарах, преследуют двойную цель: более глубокое понимание теоретического материала и развитие практически полезных навыков, связанных с решением и анализом дифференциальных уравнений. Часть материала студенты осваивают самостоятельно в ходе решения домашних заданий. Дополнительно студентам предлагается необязательная серия задач, связанных с применением компьютерных инструментов к исследованию дифференциальных уравнений.

## 5 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### 5.1 Основная литература (обязательная)

1. В.И.Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука, 1971.
2. В.А.Филиппов, Задачи к курсу обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 5.2 Дополнительная литература (необязательная)

1. Конспект курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения, часть I. А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко. Механико-математический факультет МГУ, 2012.

### 5.3 Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Материалы курса «Дифференциальные уравнения», СБ ВШЭ-РЭШ, 2013-14 учебный год: <http://math-hse.info/s13/n>

2. Система IPython Notebook (<http://ipython.org/>) и пакеты для математических вычислений в Python (<http://scipy.org/>)

## 6 Формы и методы контроля знаний студентов

Текущий контроль знаний студентов осуществляется путём проверки письменных домашних работ и самостоятельных работ, выполняемых на семинарах. В курсе запланировано проведение 5-6 обязательных домашних работ. Общий вес текущего контроля в итоговой оценке — 30% (из них 10% — самостоятельные на семинарах и 20% — домашние работы).

Промежуточный контроль знаний студентов осуществляется путём проведения промежуточной контрольной работы (мидтерма). Мидтерм проводится в письменной форме в течение 80 минут. В ходе выполнения работы допускается использование простых калькуляторов (не позволяющих строить графики функций) и листа А4, на котором студент может заранее собственноручно сделать любые необходимые ему для выполнения работы записи (формулы, определения и т.д.) Оценка за мидтерм выставляется по 100-бальной шкале. Допускается переписывание мидтерма с понижающим коэффициентом 0.7. Вес мидтерма в итоговой оценке — 30%.

Итоговый контроль осуществляется путём проведения письменной контрольной работы в течение 120 минут. Правила проведения итоговой работы аналогичны правилам проведения мидтерма. Переписывание итоговой работы не допускается. Вес итоговой работы в оценке по курсу — 40%.

Дополнительно предусмотрено несколько необязательных домашних работ, покрывающих материал, не входящий в основную часть курса. Выполнение дополнительных домашних работ позволяет поднять итоговую оценку не более, чем на 1 балл.

В случае получения неудовлетворительной итоговой оценки, студент передаёт итоговую контрольную работу в обычном порядке пересдач. Форма проведения пересдачи аналогична форме проведения контрольной работы.